



TITLE:

# Injective Envelopes of Operator Systems (作用素環の研究とその応用)

AUTHOR(S):

浜名, 正道

---

CITATION:

浜名, 正道. Injective Envelopes of Operator Systems (作用素環の研究とその応用). 数理解析研究所講究録 1977, 314: 27-35

ISSUE DATE:

1977-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103938>

RIGHT:

# Injective envelopes of operator systems

東北大 理 浜名 正道

線型空間  $V$  は, それがある Hilbert 空間  $H$  上の全ての有界線型作用素が作る  $C^*$ -代数  $B(H)$  の線型部分空間となっていて,

$$V^* \equiv \{v^*: v \in V\} = V, \quad 1 \in V \quad (1; \text{恒等作用素})$$

を満たしているとき, operator system と呼ばれる. Choi-Effros [2] は operator systems と completely positive linear

maps の作る category  $\mathcal{C}$  において injectivity を次のように定義した:  $V \in \mathcal{C}$  が injective であるとは, 任意の

$M, N \in \mathcal{C}$ ,  $M \subset N$  に対し, 任意の completely positive map  $\alpha: M \longrightarrow V$  が completely positive map  $\hat{\alpha}: N \longrightarrow V$  に

拡張できるときをいう.

ここでは任意に与えられた operator system  $V$  を含む injective operator system (resp. unital  $C^*$ -algebra) の中で minimal なもの — それを  $V$  の injective envelope (resp.  $C^*$ -envelope) と呼ぶ — が一意に存在することを示す. また

Arneson [1] の意味での Šilov boundary の存在を示し, unital  $C^*$ -algebra  $A$  に対し  $A$  の injective envelope と  $A$  の (J. D. M. Wright [6] の意味での) regular  $\sigma$ -completion との関係を調べる.

1. 定義. operator systems  $V \subset B(H)$ ,  $W \subset B(K)$  に対し, linear map  $\varphi: V \longrightarrow W$  が 1 対 1, into (resp. onto) で  $\varphi, \varphi^{-1}: \varphi(V) \longrightarrow V$  がともに completely positive のとき,  $\varphi$  を complete order injection (resp. complete order isomorphism) と呼ぶ. 固定した operator system  $V$  に対し, operator system  $W$  と unital (= unit-preserving) complete order injection  $\kappa: V \longrightarrow W$  と a pair  $(W, \kappa)$  を  $V$  の extension と呼ぶ. 特に  $W$  が injective operator system (resp. unital  $C^*$ -algebra であって  $\kappa(V) \subset W$  によって  $C^*$ -algebra として生成されている) のとき,  $(W, \kappa)$  を injective (resp.  $C^*$ -) extension という.  $V$  の 2 つの extensions  $(W_1, \kappa_1), (W_2, \kappa_2)$  が 同値 である [ $(W_1, \kappa_1) \sim (W_2, \kappa_2)$  と書く] とは, unital complete order isomorphism  $\iota: W_1 \longrightarrow W_2$  が存在し,  $\iota \circ \kappa_1 = \kappa_2$  をみたすときをいう.

## 2. 結果.

Theorem 1. 任意の operator system  $V$  に対し, 次の性質を満たす injective (resp.  $C^*$ -) extension  $(B, \kappa)$  [resp.  $(A, \kappa)$ ] が同値関係  $\sim$  を除いて一意に定まる.

(i)  $B$  は injective  $C^*$ -algebra,  $A$  はその  $C^*$ -subalgebra であり,  $\kappa(V) \subset A \subset B$ .

(ii) 任意の  $V$  の injective extension  $(W, \lambda)$  [resp.  $C^*$ -extension  $(C, \mu)$ ] に対し, unital complete order injection  $\iota: B \longrightarrow W$  が存在し,  $\iota \circ \kappa = \lambda$  を満たす [resp. onto  $*$ -homomorphism  $\pi: C \longrightarrow A$  が存在し,  $\pi \circ \mu = \kappa$  を満たす; 従って

$$(C/\text{Ker } \pi, q \circ \pi) \sim (A, \kappa)$$

ここで  $q: C \longrightarrow C/\text{Ker } \pi$  は quotient homomorphism を表わす].

この  $(B, \kappa)$  [resp.  $(A, \kappa)$ ] を  $V$  の injective (resp.  $C^*$ -) envelope と呼ぶ. unital  $C^*$ -algebras の間の unital complete order isomorphism は必然的に  $*$ -isomorphism になるので,  $B, A$  は  $C^*$ -algebras として unique である.

Corollary.  $V$  を unital  $C^*$ -algebra  $C$  の linear subspace で  $1$  を含み,  $C$  を  $C^*$ -algebra として生成しているようなもの

のとする。そのとき Arveson [1] の意味での Šilov boundary  $J$  for  $V$  が存在する, i.e.,  $J$  は  $C$  の closed two-sided ideal であり, canonical map  $V \hookrightarrow C \rightarrow C/J$  が completely isometric になる; しかも  $J$  はこの性質をもつ  $C$  の closed two-sided ideals の中で最大である。

$A$  を unital  $C^*$ -algebra,  $(B, \kappa)$  をその injective envelope とする。以下で  $A$  と  $B$  との関係を調べよう。  $A$  が  $C^*$ -algebra であるから  $A$  の  $C^*$ -envelope は  $A$  それ自身と一致し,  $\kappa: A \rightarrow \kappa(A) \subset B$  が  $*$ -monomorphism (1 to 1  $*$ -homomorphism) となることがわかるが, 更に

Proposition 2.  $\kappa$  は suprema を保存する, i.e.,  $A$  s. a. の部分集合  $\mathcal{F}$  に対し  $\sup \mathcal{F}$ ,  $\sup \kappa(\mathcal{F})$  がそれぞれ  $A$ ,  $B$  において存在すれば,

$$\kappa(\sup \mathcal{F}) = \sup \kappa(\mathcal{F}).$$

[ $B$  は injective であるから, monotone complete である。従って  $\mathcal{F}$  が increasing net である場合には, " $\sup \kappa(\mathcal{F})$  が  $B$  において存在する" という仮定は (必然的に満たされるので) 不要である。]

次の Lemma は容易に証明される:

Lemma 1.  $D$  を任意の unital  $C^*$ -algebra,  $C$  をその  $1 \in D$  を含む  $C^*$ -subalgebra とし

$$N \equiv \{x \in D^+ : \exists \text{ a subset } \mathcal{F} \text{ of } C^+ \text{ s.t.}$$

$$\exists \inf \mathcal{F} \text{ (in } C) = 0 \text{ and } 0 \leq x \leq y \text{ for } \forall y \in \mathcal{F}\}$$

と置く

- (i)  $N$  は  $D$  の closed order ideal であり  $C \cap N = \{0\}$ , 更に  $C$  の任意の unitary element  $u$  に対し  $uNu^* = N$ ; 従って
- (ii)  $I$  を  $N$  の linear span とすると  $C \cap I = \{0\}$ ,  $C + I$  は  $D$  の  $C^*$ -subalgebra,  $I$  は  $C + I$  の closed two-sided ideal である.

この Lemma を  $B$  と  $\kappa(A) \subset B$  に対し適用する. そのとき  $(B, \kappa)$  が  $A$  の injective envelope という条件から上述の  $I = \{0\}$ , 従って  $N = \{0\}$  が示せる. これが命題の主張に外ならない.

上述のまうに  $B$  は monotone complete である. そこで  $\kappa(A) \subset B$  によって  $\sigma$ -generate される  $B$  の linear subspace  $C$  が考えられる:  $C = C_{s,a.} + i C_{s,a.}$ ,  $C_{s,a.}$  は  $\kappa(A)_{s,a.}$  を含む  $B$  の最小の  $\sigma$ -closed linear subspace である. そのとき

Proposition 3.  $(C, \kappa)$  は J. D. M. Wright [6] の意味での  $A$  の regular  $\sigma$ -completion である, i.e.,  $C$  は  $\sigma$ -complete  $C^*$ -algebra であり,  $\kappa$  は次の性質を満たす:

- (i)  $(a_n)$  が  $A_{s.a.}$  の任意の減少列で  $\inf a_n$  ( $\text{in } A$ )  $= 0$  なるば  $\inf \kappa(a_n)$  ( $\text{in } C$ )  $= 0$ ; (ii) 任意の  $c \in C_{s.a.}$  に対し  $\sup \{ \kappa(a) : a \in A_{s.a.}, \kappa(a) \leq c \} = c$ .

任意の unital  $C^*$ -algebra に対し その regular  $\sigma$ -completion の存在と一意性が J. D. M. Wright [6] によって証明されている.

Lemma 2.  $A$  の regular  $\sigma$ -completion を  $(D, \alpha)$  とし  $M_n$  を  $n \times n$  複素行列環とすると  $(D \otimes M_n, \alpha \otimes \text{id})$  は  $A \otimes M_n$  の regular  $\sigma$ -completion に含まれる ( $\alpha \otimes \text{id} : A \otimes M_n \rightarrow D \otimes M_n$ ,  $\text{id} = \text{identity map on } M_n$ ), i.e.,  $D \otimes M_n$  を含む  $C^*$ -algebra  $E$  が存在して  $(E, \alpha \otimes \text{id})$  が  $A \otimes M_n$  の regular  $\sigma$ -completion となる.

Lemma 3.  $\alpha|_{A_{s.a.}} : A_{s.a.} \rightarrow D_{s.a.}$  は次の性質をもつ: 任意の real Banach space  $X$ , contractive linear map  $\beta : D_{s.a.} \rightarrow X$  に対し  $\beta \circ \alpha : A_{s.a.} \rightarrow X$  が isometric なるば  $\beta$  も isometric である.

Proposition 3 の証明:  $B$  が injective ならば completely positive map  $\lambda: D \rightarrow B$  が存在し  $\lambda \circ \alpha = \kappa$  をみたす.  $\lambda$  が complete order injection であることを示す.

$\lambda \otimes \text{id}|_{(D \otimes M_n)_{s.a.}}: (D \otimes M_n)_{s.a.} \rightarrow (B \otimes M_n)_{s.a.}$  は contractive であり  $(\lambda \otimes \text{id}) \circ (\alpha \otimes \text{id})|_{(D \otimes M_n)_{s.a.}} = (\kappa \otimes \text{id})|_{(D \otimes M_n)_{s.a.}}$  は isometric である. 従って  $A \otimes M_n$  と  $B \otimes M_n$  の regular  $\sigma$ -completion に対し Lemma 3 を適用し更に Lemma 2 に注意すると  $\lambda \otimes \text{id}|_{(D \otimes M_n)_{s.a.}}$  が任意の  $n$  に対し isometric であることがわかる. これから  $\lambda$  が complete order injection 従って  $*$ -monomorphism となることを示せる. また Proposition 2 より  $\lambda(D) = C$  である. 従って  $(D, \alpha) \sim (C, \kappa)$ .

Proposition 4.  $A$  が simple ならば  $B$  もまた simple である; 従って特に  $B$  は  $AW^*$ -factor である.

$A$  が separable, infinite dimensional かつ simple ならば  $B$  は  $\sigma$ -finite, non  $W^*$ ,  $AW^*$ -factor of type III である.

Proof.  $(B, \kappa)$  が injective envelope であることを次の性質をみたす  $B$  の seminorm  $p$  は  $B$  の norm と一致することから:  

$$p(x) \leq \|x\|, \quad p(\kappa(a)x\kappa(b)) \leq \|a\|p(x)\|b\|$$

$$p(\kappa(a)) = \|a\| \quad (a, b \in A, x \in B).$$



$B$  の simplicity を示すために  $B$  の proper closed two-sided ideal  $I$  をとる.  $\pi: B \rightarrow B/I$  を canonical homomorphism とし  $p(x) = \|\pi(x)\|$  ( $x \in B$ ) とおく. そのとき  $A$  の simplicity と  $1 \in A$  を使うと  $p$  以上の条件をみたすことが示せ, 従って  $I = \{0\}$  が示せる.

separable infinite dimensional simple unital  $C^*$ -algebra の regular  $\sigma$ -completion が non  $W^*$ ,  $AW^*$ -factor of type III であることが知られている [7]. 従って Proposition 3 より  $B$  が non  $W^*$ ,  $AW^*$ -factor of type III を  $AW^*$ -subalgebra として含むことがわかる. 従って  $B$  は non  $W^*$ , type III となる. 更に  $A$  が separable であることから  $B$  が faithful state をもつことが示せ,  $B$  の  $\sigma$ -finiteness が従う.

## References

- [1] W. Arveson, Subalgebras of  $C^*$ -algebras, Acta Math., 123 (1969), 141-224.
- [2] M.-D. Choi and E. G. Effros, Injectivity and operator spaces, J. Functional Analysis, 24 (1977), 156-209.
- [3] H. B. Cohen, Injective envelopes of Banach spaces, Bull. Amer. Math. Soc., 70 (1964), 723-726.
- [4] M. Hamana, Injective envelopes of  $C^*$ -algebras, preprint.
- [5] ———, Injective envelopes of operator systems, preprint.
- [6] J. D. M. Wright, Regular  $\sigma$ -completions of  $C^*$ -algebras, J. London Math. Soc., 12 (1976), 299-309.

- [7] J. D. M. Wright, Wild AW\*-factors and Kaplansky-Rickart algebras,  
J. London Math. Soc., 13 (1976), 83-89.